

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Medio

Prueba 1

30 de octubre de 2023

Zona A tarde | Zona B tarde | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.



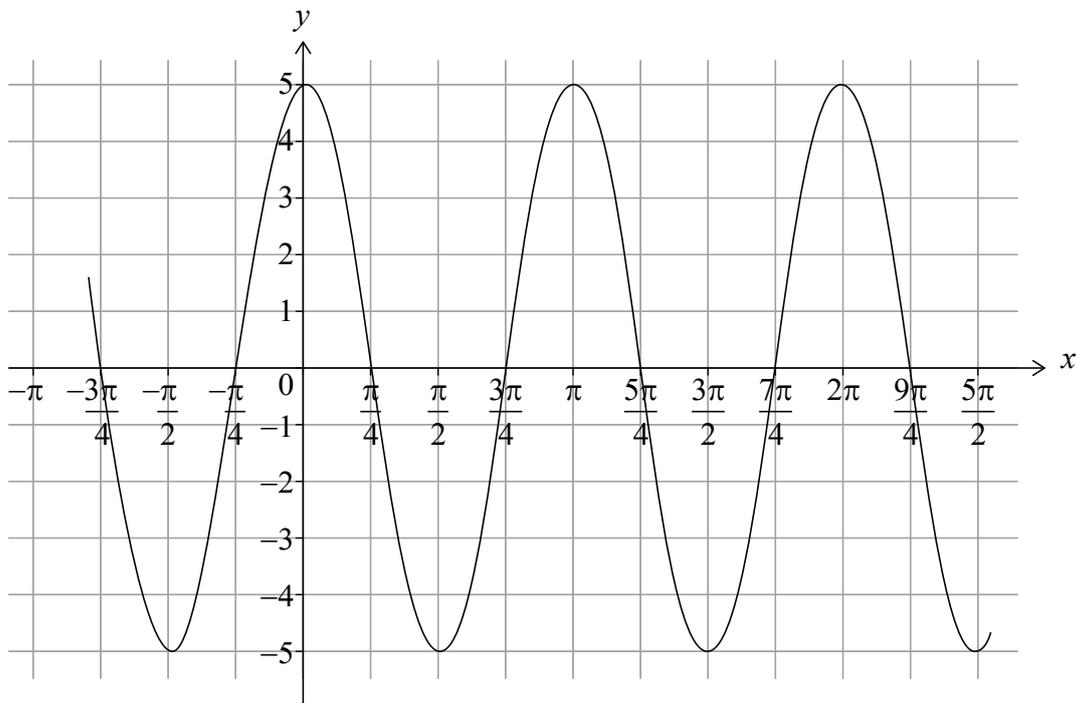
No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 7]

Considere la función $f(x) = a \cos(bx)$, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$. La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f .



- (a) Escriba el valor de a . [1]
- (b) (i) Escriba el período de f . [3]
- (ii) A partir de lo anterior, halle el valor de b . [3]
- (c) Halle el valor de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 17]

Una compañía de ballet representa todos los años *El cascanueces*. El año pasado hicieron un total de 60 actuaciones en su teatro, que tiene una capacidad máxima de 800. En la siguiente tabla de frecuencias se muestra el número de entradas vendidas (n) en cada actuación.

Número de entradas vendidas (n)	Número de actuaciones
$0 < n \leq 200$	3
$200 < n \leq 400$	p
$400 < n \leq 600$	18
$600 < n \leq 800$	30

(a) (i) Halle el valor de p .

(ii) Escriba la clase modal.

[2]

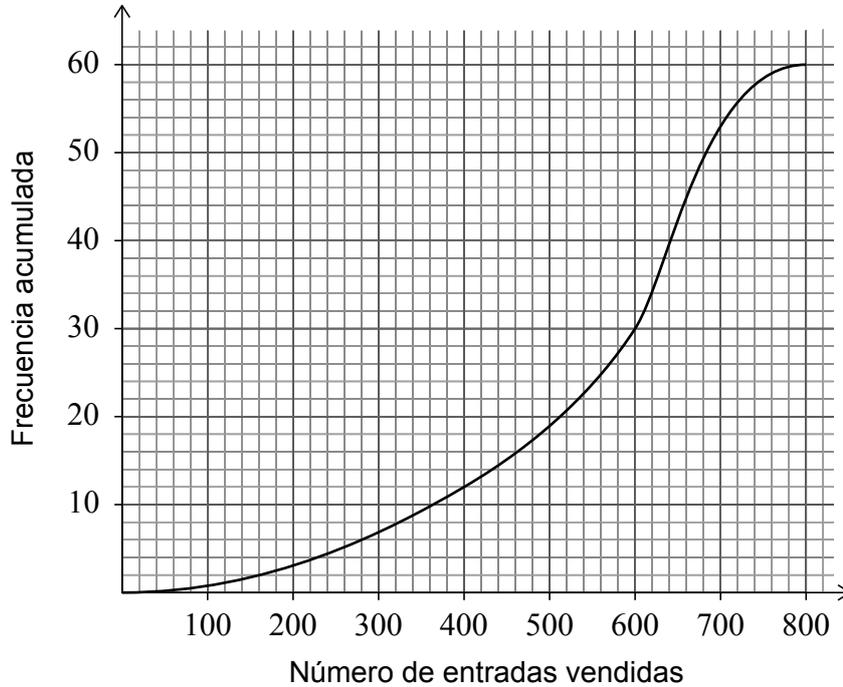
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 7: continuación)

Esos mismos datos se representan también en el siguiente diagrama de frecuencias acumuladas.



- (b) Utilice la curva de frecuencias acumuladas para estimar:
 - (i) La mediana del número de entradas vendidas
 - (ii) El número de actuaciones en las que se vendieron al menos el 80% de las entradas.

[4]

(Esta pregunta continúa en la página 13)



16EP11

Véase al dorso

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 7: continuación)

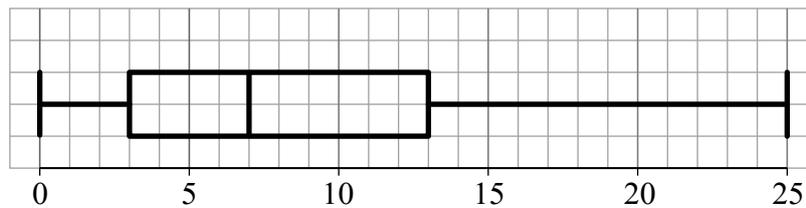
Después de una actuación, la compañía decide hacer una encuesta para conocer la opinión del público.

- (c) (i) Indique una desventaja de que la compañía le haga la encuesta solo al primer 5% de personas del público que salgan del teatro.
- (ii) Describa brevemente cómo podría la compañía recoger la opinión del 5% del público utilizando el método de muestreo sistemático.
- (iii) Indique qué método de muestreo se debería utilizar si queremos que la encuesta sea representativa del número de niños y del número de adultos que hay en el público.

[4]

El año pasado se vendieron 36 000 entradas para ver *El cascanueces*.

- (d) El siguiente diagrama de caja y bigotes muestra el dinero que se gastó el público en la tienda de souvenirs cuando fueron a ver la actuación.



Dinero que gastaron (\$)

- (i) Estime el número de personas que gastaron entre \$3 y \$25.
 - (ii) La mitad del público gastó menos de \$ a . Estime el valor de a .
- (e) Este año la compañía volverá a hacer 60 actuaciones y espera vender 17 entradas adicionales en cada actuación.
- (i) Calcule la media del número de entradas que la compañía espera vender este año en cada actuación.
 - (ii) Indique qué efecto tendría (de tener alguno) este aumento en la venta de entradas sobre la varianza del número de entradas vendidas en cada actuación.

[3]

[4]



No escriba soluciones en esta página.

8. [Puntuación máxima: 15]

Las funciones f y g vienen dadas por

$$f(x) = \ln(2x - 9), \text{ donde } x > \frac{9}{2}$$

$$g(x) = 2 \ln x - \ln d, \text{ donde } x > 0, d \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Indique la ecuación de la asíntota vertical del gráfico de $y = g(x)$. [1]

Los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en dos puntos distintos.

(b) (i) Muestre que, en esos puntos de intersección, se cumple que $x^2 - 2dx + 9d = 0$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $d^2 - 9d > 0$.

(iii) Halle el intervalo de posibles valores de d . [9]

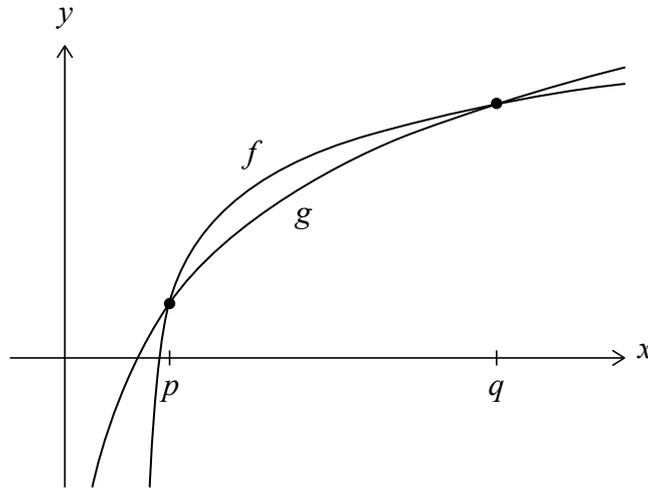
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 8: continuación)

La siguiente figura muestra una parte de los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$.



Los gráficos se cortan en $x = p$ y $x = q$, donde $p < q$.

- (c) Para el caso en el que $d = 10$, halle el valor de $q - p$. Exprese la respuesta en la forma $a\sqrt{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

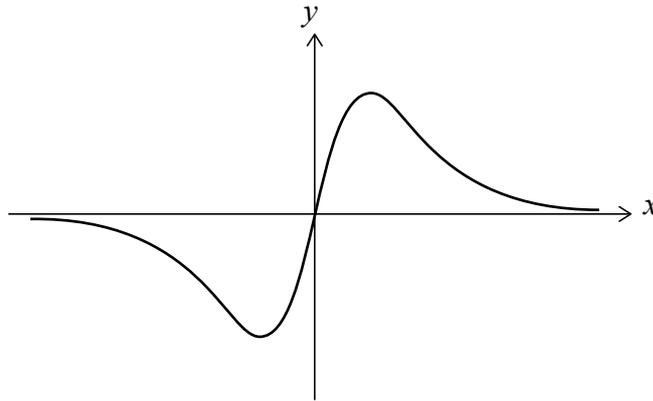
[5]



No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 13]

Considere la función f definida así: $f(x) = \frac{8x}{(x^2 + 1)^3}$, donde $x \in \mathbb{R}$. En la siguiente figura se muestra el gráfico de f .



(a) Muestre que $f'(x) = \frac{8(1-5x^2)}{(x^2 + 1)^4}$. [4]

(b) Halle $\int f(x)dx$. [4]

Considere una función $g(x)$ que se define para $x \in \mathbb{R}$. La derivada de g es tal que $g'(x) = f'(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sea R la región delimitada por el gráfico de f , el gráfico de g , la recta $x = 0$ y la recta $x = 3$. El área de R es igual a $\frac{27}{2}$.

(c) Halle las dos posibles expresiones de $g(x)$. [5]

